

EXERCICE 4 Série S ensembles bi-connexes

Un ensemble A d'entiers naturels distincts est dit bi-connexe lorsque pour tout élément x de A , au moins un des entiers $x - 1$ ou $x + 1$ appartient à A .

Ainsi l'ensemble $A = \{2013 ; 2014\}$ est bi-connexe car $2013 \in A$, avec $(2013 + 1) \in A$
et $2014 \in A$, avec $(2014 - 1) \in A$.

Par contre $B = \{2 ; 3 ; 6 ; 8 ; 9\}$ n'est pas bi-connexe car 6 est « isolé » dans B , c'est-à-dire $(6 + 1) \notin B$ et $(6 - 1) \notin B$.

Pour traiter l'une des questions suivantes, on pourra utiliser la propriété :
pour tout entier n non nul, la somme des n premiers entiers est :

$$1 + 2 + \dots + n = \sum_{k=1}^{k=n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

1. Avec quel entier peut-on compléter l'ensemble B pour le rendre bi-connexe ?
2. Parmi les ensembles bi-connexes contenant tous les nombres premiers inférieurs ou égaux à 13, quel est celui qui a le moins d'éléments ?
3. On retire au hasard un élément de l'ensemble $\{1 ; 2 ; \dots ; 10\}$ formé des entiers de 1 à 10. Quelle est la probabilité que l'ensemble obtenu reste bi-connexe ?
4. Combien peut-on former de sous-ensembles bi-connexes à 3 éléments dans $\{1 ; 2 ; \dots ; 2014\}$?
5. a. Dresser la liste de tous les sous-ensembles bi-connexes à 4 éléments dans $\{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$.
b. Combien peut-on former de sous-ensembles bi-connexes à 4 éléments dans $\{1 ; 2 ; \dots ; n\}$ où n est un entier supérieur ou égal à 4 ?
c. Déterminer la plus petite valeur de n telle que le nombre de tels sous-ensembles dépasse 2014.
6. On note u_n le nombre de sous-ensembles bi-connexes de $\{1 ; 2 ; \dots ; n\}$ où n est un entier supérieur ou égal à 2.
On a donc $u_2 = 1$ car seul $\{1 ; 2\}$ est bi-connexe.
De même $u_3 = 3$ car seuls $\{1 ; 2\}$, $\{2 ; 3\}$ et $\{1 ; 2 ; 3\}$ sont bi-connexes.
a. Justifier que $u_4 = 6$.
b. On admet que pour tout $n > 4$, $u_n = 2u_{n-1} - u_{n-2} + u_{n-3} + 1$ et on donne l'algorithme suivant :

Traitement :	1	a prend la valeur 1
	2	b prend la valeur 3
	3	c prend la valeur 6
	4	Pour k allant de 1 jusqu'à 10 faire
	5	u prend la valeur $2c - b + a + 1$
	6	a prend la valeur b
	7	b prend la valeur c
	8	c prend la valeur u
	9	Fin Pour
Sortie :	10	Afficher u

On exécute l'algorithme. Quelle valeur s'affiche en sortie ? Que représente-t-elle ?

- c. Recopier en le modifiant l'algorithme précédent pour qu'il affiche en sortie le plus petit entier naturel n_0 tel que $u_{n_0} \geq 2014$. Que vaut alors n_0 ?